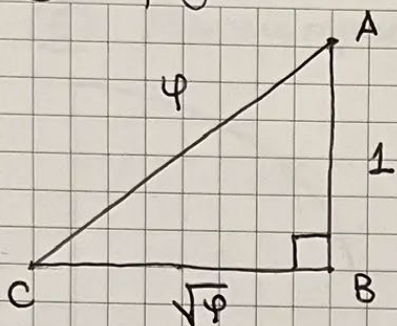




# Нахождение числа $\sqrt{5}$ с помощью треугольника Кеплера

① Треугольник Кеплера, где  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (золотое сечение)



По закону Пифагора:  $\varphi^2 = (\sqrt{\varphi})^2 + 1 = \varphi + 1$

Проверим:

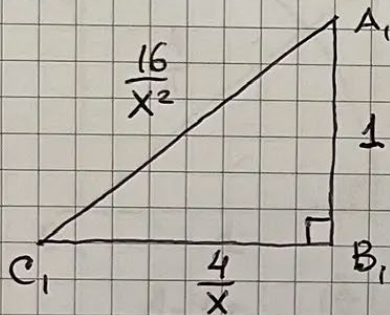
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0; \quad \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0$$

приведём к единому знаменателю:

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5-2(1+\sqrt{5})-4}{4} = 0 \quad 1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4 = 0$$

$$1+5+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2-4 = 6-6 = 0 \quad \text{уравнение верно.}$$

② Заменим  $\sqrt{\varphi}$  на  $\frac{4}{x}$  и построим треугольник  $A_1B_1C_1$ , где  $\sqrt{\varphi} = \frac{4}{x}$



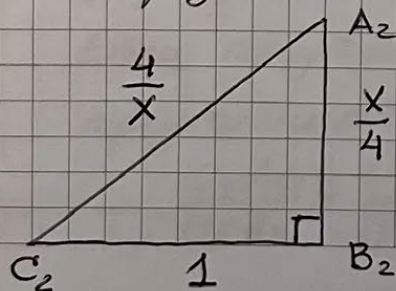
Проверим соотношения сторон:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{1} = 1; \quad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{\sqrt{\varphi}}{(4/x)} = \frac{(4/x)}{(4/x)} = 1;$$

$$\frac{CA}{C_1A_1} = \frac{\varphi}{(16/x^2)} = \frac{(16/x^2)}{(16/x^2)} = 1$$

Вывод: треугольник  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$  (треугольники равны)

③ Построим прямоугольный треугольник  $\triangle A_2B_2C_2$ , подобный  
треугольнику  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Проверим соотношения сторон:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{1}{(x/4)} = \frac{4}{x}; \quad \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{(4/x)}{1} = \frac{4}{x};$$

$$\frac{C_1A_1}{C_2A_2} = \frac{(16/x^2)}{(4/x)} = \frac{16 \cdot x}{x^2 \cdot 4} = \frac{4}{x}$$

Вывод:  $\triangle A_2B_2C_2$  подобен  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$





Промышленная  
группа АЛ5

④ Рассмотрим круг с  $R=1$



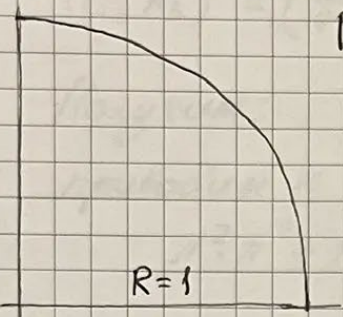
Площадь круга равна

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

⑤ Рассмотрим четверть ( $\frac{1}{4}$ ) круга с  $R=1$

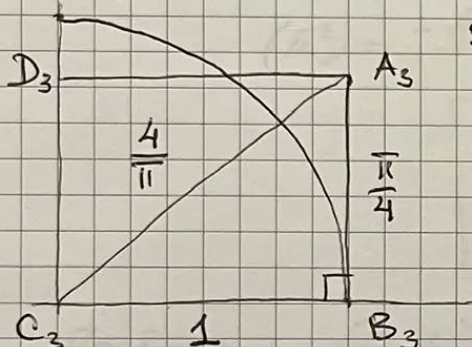
Площадь  $\frac{1}{4}$  круга:

$$S_1 = \frac{S}{4} = \frac{\pi}{4}$$



⑥ Построим прямоугольник  $A_3B_3C_3D_3$ , площадь которого равна площади четверти круга

$$S_2 = S_1 = \frac{\pi}{4}$$



Стороны  $A_3B_3 = C_3D_3 = \frac{\pi}{4}$ ;  $B_3C_3 = A_3D_3 = 1$

Проведём диагональ (гипотенузу)  $C_3A_3$

Рассмотрим треугольник  $\triangle A_3B_3C_3$

примем, что  $\frac{\pi}{4} = x$ , тогда:

$$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{(\frac{x}{4})}{(\frac{\pi}{4})} = 1; \quad \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{1}{1} = 1$$

Вывод:  $\triangle A_2B_2C_2$  и  $\triangle A_3B_3C_3$  подобны по правилу подобия прямоугольных треугольников, у которых катеты подобны. Если треугольники подобны, тогда и гипотенузы этих треугольников подобны, а значит:

$$\frac{C_2A_2}{C_3A_3} = \frac{(\frac{4}{x})}{(\frac{\pi}{4})} = 1 \quad \text{и} \quad C_3A_3 = \frac{4}{\pi}$$

Промышленная группа АЛ5

ООО «МАК» Россия, 142506,

Московская область, г. Павловский Посад, ул. 1 Мая, 105

ООО «АВА-Трейд» Россия, 396931,

Воронежская область, Семилукский район, село Ендовище, ул. Калинина, 1а

ООО «АЛ5-ЮГ» Россия, 347044,

Ростовская область, г. Белая Калитва, ул. Сельмашевская, 8

02.02.2026 Лысюк Д.Р.

*Лысюк Д.Р.*

8 800 600 55 81

AL5PROF.RU





⑦ По закону Пифагора:  $(C_3 A_3)^2 = (A_3 B_3)^2 + (C_3 B_3)^2$

$$(C_3 A_3)^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{\pi^2}{16} + 1 \quad \text{и одновременно} \quad (C_3 A_3)^2 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}$$

Получим:  $\frac{\pi^2}{16} + 1 = \frac{16}{\pi^2}$ , или  $\frac{\pi^2}{16} + 1 - \frac{16}{\pi^2} = 0$

приводим к общему знаменателю:

$$\frac{\pi^2 \cdot \pi^2 + 1 \cdot 16 \cdot \pi^2 - 16 \cdot 16}{16 \cdot \pi^2} = 0 \quad 16 \cdot \pi^2 \neq 0$$

$$\pi^4 + 16 \cdot \pi^2 - 16^2 = 0, \text{ или } (\pi^2)^2 + 16 \cdot (\pi^2) - 16^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 16^2 + 4 \cdot 16^2 = 5 \cdot 16^2$$

$$(\pi^2) = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{5 \cdot 16^2}}{2} = \frac{16 \cdot \sqrt{5} - 16}{2} = 8 \cdot \sqrt{5} - 8$$

$$\boxed{\begin{aligned} \pi &= \sqrt{8 \cdot \sqrt{5} - 8}, \text{ или} \\ \pi &= 4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \end{aligned}}$$

Проверка:  $(C_3 A_3)^2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{16}{\pi^2}$  или  $\frac{\pi^2}{16} + 1 - \frac{16}{\pi^2} = 0$

$$\begin{aligned} \pi^4 + 16 \pi^2 - 16^2 &= (\sqrt{8 \cdot \sqrt{5} - 8})^4 + 16 \cdot (\sqrt{8 \cdot \sqrt{5} - 8})^2 - 16^2 = \\ &= (8 \cdot \sqrt{5} - 8)^2 + 16 \cdot (8 \cdot \sqrt{5} - 8) - 16^2 = 64 \cdot 5 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{5} + 64 + 128 \cdot \sqrt{5} - 128 - 256 = \\ &= 320 - 128 \cdot \sqrt{5} + 64 + 128 \cdot \sqrt{5} - 128 - 256 = 320 + 64 - 128 - 256 = 0 \\ &= 384 - 384 = 0 \quad \text{решение верно} \end{aligned}$$





⑧ Сравним прямоугольный треугольник  
Кеплера  $\triangle ABC$  с прямоугольным  
треугольником  $\triangle A_3 B_3 C_3$

$$\frac{AB}{A_3 B_3} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{4 \cdot \sqrt{5-1}}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-1}} = \sqrt{\frac{2}{5-1}}$$

$$\frac{BC}{B_3 C_3} = \frac{\sqrt{\varphi}}{1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Сравним:  $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5-1}}$ , или  $\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5-1}}\right)^2$ , или  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{5-1}$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{5-1} = \frac{(\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1) - 2 \cdot 2}{2 \cdot (\sqrt{5}-1)} = 0 \quad 2 \cdot (\sqrt{5}-1) \neq 0$$

$$5-1-4=0 \quad \text{Вывод: } \sqrt{\frac{2}{5-1}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{CA}{C_3 A_3} = \frac{\varphi}{\left(\frac{4}{\pi}\right)} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{4 \cdot \sqrt{5-1}}{4}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 \cdot (5-1)}}{2 \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+2\sqrt{5}+5)(5-1)}{8}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}+5\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}-5}{8}} = \sqrt{\frac{4+4\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Сравним:  $\frac{AB}{B_3 A_3} = \frac{CA}{C_3 A_3}$ , или  $\sqrt{\frac{2}{5-1}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ , или  $\left(\sqrt{\frac{2}{5-1}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2$

$$\frac{2}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ или } \frac{2}{5-1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0; \quad \frac{2 \cdot 2 - (\sqrt{5}+1) \cdot (\sqrt{5}-1)}{2 \cdot (\sqrt{5}-1)} = 0$$

$$2 \cdot (\sqrt{5}-1) \neq 0, \text{ тогда } 4 - (5-1) = 4-4=0$$

Вывод: Прямоугольный треугольник Кеплера  $\triangle ABC$  и  
прямоугольный треугольник  $\triangle A_3 B_3 C_3$  подобны, а значит

$$\pi = \sqrt{8 \cdot \sqrt{5}-8} = 4 \cdot \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$

*Лысюк Д.Р.*

